Kooperative Phänomene und Diffusion eines Plasmas quer zu einem Magnetfeld. I

Von L. Biermann und D. Pfirsch

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. **15 a**, 10—12 [1960]; eingegangen am 15. September 1959)

The possibility is discussed and general arguments are given that, under certain conditions, local fluctuations of charge density may be excited in inhomogeneous plasmas. Their maximal amplitudes are estimated and the influence of these instabilities on the confinement of plasmas by magnetic field is investigated.

Die in der Astrophysik üblichen Abschätzungen über die Zeitskala, in der sich der magnetische Fluß durch einen materiellen Querschnitt ändert, und ebenso die analogen Abschätzungen über die Zeiten, über welche man ein heißes Plasma mittels geeigneter Magnetfelder eingeschlossen halten kann, beruhen wesentlich auf der Annahme der Gültigkeit einer Beziehung, die aus dem Ohmschen Gesetz und dem Induktionsgesetz folgt und die im einfachsten Fall (skalare elektrische Leitfähigkeit, Zwei-Flüssigkeitsmodell) lautet

$$-\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}} \equiv -\frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{B}} - \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\times\mathfrak{B}]) = \operatorname{rot}(\eta\,\mathfrak{j}) - \operatorname{rot}\mathfrak{E}^e . \tag{1}$$

Darin bedeuten $\mathfrak{v}$ die makroskopische Geschwindigkeit, η den spezifischen elektrischen Widerstand (el.st.E., $\sec^{+1}$), $\mathfrak{j}$ die Stromdichte (el.st.E.) und $\mathfrak{E}^e$ die aus Druckgradienten (und evtl. Beschleunigungen) resultierenden „eingeprägten" elektromotorischen Kräfte. Mittels der ersten Maxwellschen Gleichung ergibt sich daraus für die Zeitskala, in der das Plasma aus dem Querschnitt πs^2 quer zu den Feldlinien herausdiffundiert, im Falle eines im wesentlichen durch Ströme außerhalb des Plasmas erzeugten Magnetfeldes größenordnungsmäßig

$$s^2/t \approx c^2\,\eta\,\beta\,, \tag{2}$$

wo β das Verhältnis des Gasdruckes zu $(1/8\pi)\,B^2$ ist.

Die bisherigen experimentellen Erfahrungen haben in der Regel gezeigt, daß das Plasma viel rascher quer zu den magnetischen Feldlinien an die Wand diffundiert, als man dies nach der obigen Gleichung erwarten würde; z. B. ergab sich bei den Stellarator-Experimenten in Princeton, die zum Vergleich zwischen Theorie und Experiment vielleicht besonders geeignet sein sollten, eine Diskrepanz um mindestens einen Faktor 10^2.

Es ist bereits verschiedentlich vermutet worden (Bohm, Spitzer usw.), daß kollektive Phänomene, etwa Plasmaschwingungen oder Plasmawellen, irgendwie eine erhöhte Diffusion der Ionen und Elektronen quer zu den Feldlinien ermöglichen. Für die Anregung der Plasmaschwingungen sind insbesondere run-away Elektronen, die durch die angelegten elektrischen Felder entstehen, verantwortlich gemacht worden. Es liegt auch nahe, in diesem Zusammenhang an die Gaborschen Experimente [1] zum sogenannten Langmuir-Paradoxon zu denken, bei denen ja weit überthermische Schwankungen des elektrischen Feldes mit Frequenzen im Bereich eines mäßigen Bruchteils der Plasmafrequenz des Inneren der Entladung gefunden wurden (also vermutlich unweit der lokalen Plasmafrequenz der randnahen Gebiete).

Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich einerseits mit der Möglichkeit, daß unter bestimmten Umständen eine Art Selbstanregung lokaler Schwankungen der Elektronendichte, also von Plasmaschwingungen, eintritt, und andererseits mit den Folgen solcher angenommener überthermischer Schwingungen, Wellen oder Schwankungserscheinungen auf das Festhalten eines Plasmas im Magnetfeld.

Wir beginnen mit der Diskussion des zweiten Punktes. Die Diffusion der Ionen und der Elektronen quer zu einem Magnetfeld infolge von Schwankungen des lokalen elektrischen Feldes E_ν mit einer Frequenz ν oberhalb der Gyrofrequenz läßt sich als stochastischer Prozeß (bis auf hier nicht interessierende dimensionslose Faktoren der Größenordnung eins) beschreiben durch

$$\frac{s^2}{t} \approx \frac{c^2}{B^2}\,\overline{E_\nu{}^2}\,\frac{1}{\nu}\,. \tag{3}$$

[1] D. Gabor, Nature, Lond. **176**, 916 [1955].

Wenn man hierin als mittleren Schwankungsbetrag der elektrischen Feldstärke den Wert einsetzt, der sich im Fall thermodynamischen Gleichgewichts aus der Schwankungstheorie für den auf Grund der elektrostatischen Anziehung maximal möglichen Bereich der linearen Ausdehnung von ungefähr einer DEBYE-Länge λ_{D} ergibt (das ist etwa der Wert, der der Wurzel aus der Anzahl der Elektronen mit der Teilchendichte n in einem DEBYE-Volumen entspricht), also

$$\overline{E_\nu^2} \approx \frac{e^2\, n}{\lambda_{\mathrm{D}}} \approx \left(\frac{4\,\pi\, n^3\, e^6}{k\, T}\right)^{1/2} \tag{4}$$

und für ν die Plasmafrequenz, so folgt aus (3) ein Ausdruck, welcher bis auf den logarithmischen Faktor genau der Beziehung (2) äquivalent ist. (2) ist also – und das haben die Untersuchungen von SPITZER et al. [2] noch genauer gezeigt – zu einem erheblichen Teil als Wirkung der statistischen Schwankungen zu verstehen. Es ist daher klar, daß überthermische Schwankungen des elektrischen Feldes die Zeitskala, über die das Plasma durch das Magnetfeld festgehalten wird, etwa $\sim 1/\overline{E^2}$ verkürzen können.

Es folgen nun Bemerkungen über einige allgemeine Aspekte des Auftretens überthermischer Amplituden von Plasmaschwingungen und Wellen.

Überthermische Ladungsschwankungen über Bereiche, die groß sind gegen den mittleren Abstand der Teilchen, können in loser Analogie zur Turbulenz sozusagen als makroskopische Bewegung einer Teilchensorte (im allgemeinen der Elektronen) betrachtet werden. Im Fall annähernden thermischen Gleichgewichts läßt sich ihre spektrale Dichte nach GABOR [3] abzählen, indem man sie als Teil des elektromagnetischen Schwingungsspektrums ansieht, für ihre gesamte Energiedichte ergibt sich (dimensionsmäßig) der gleiche Ausdruck, wie ihn die Betrachtung der Schwankungserscheinungen lieferte (s. o.). Da aber die Plasmaschwingungen senkrecht zur Oberfläche ohne Magnetfeld nicht strahlen (bei Gegenwart eines solchen gibt es Schwingungstypen sowohl mit wie auch ohne Ausstrahlung) und mindestens bis etwa zum doppelten der Plasmaeigenfrequenz – dort beginnt nach GABOR [3] das Dispersionsgesetz (BOHM und GROSS) in eine statistische Korrelation zwischen Wellenzahl und Frequenz überzugehen – die Dämpfung bei hoher Temperatur schwach ist, können sie als ein Freiheitsgrad (bzw. eine Vielzahl von solchen) betrachtet werden, der in einem stationären Nicht-Gleichgewichtszustand sehr viel mehr Energie (stationär) an sich ziehen kann, als dem Gleichgewichtswert für die lokale kinetische Temperatur entspricht.

Der Fall der durch thermische Instabilität bedingten Turbulenz (Konvektion) – um diese Analogie noch einmal aufzunehmen – ist noch in anderer Hinsicht von Interesse. Wird der kritische Temperaturgradient auch nur geringfügig überschritten, so wird mit dem Eintreten der Turbulenz oft ein Vielfaches der Energie transportiert (bei praktisch dem gleichen Temperaturgradienten) und entsprechend verstärkt ist dann auch die Produktion von Entropie [4]. Für die Astrophysik, insbesondere für die Interpretation der sog. Aktivitätserscheinungen auf Sternen ist von Bedeutung, daß in solchen Gebieten der relative Anteil der Energie, welcher die nichtthermischen Strahlungskomponenten speist (überthermische RÖNTGEN- und Radiofrequenzstrahlung, energiereiche Korpuskularstrahlungen), recht beträchtlich werden kann (insbesondere in oberflächennahen Konvektionszonen) [5].

Auf diesem Hintergrund liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, ob nicht in einer Gasentladung, in der ja Nicht-Gleichgewichtsverhältnisse künstlich aufrechterhalten werden, Plasmaschwingungen insbesondere in den oberflächennahen Bereichen überangeregt werden, die dann die Energiedissipation und damit die Produktion von Entropie merklich erhöhen. Ein derartiges Verhalten ließe sich auch als eine spezielle Art von Instabilität, hervorgerufen

[2] L. SPITZER, Phys. Rev. **80**, 230 [1950]; **89**, 977 [1953]; Astrophys. J. **116**, 299 [1952].

[3] D. GABOR, Proc. Roy. Soc., Lond. **213**, 73 [1952].

[4] Es nimmt (empirisch und im Einklang mit der neueren Turbulenztheorie) für gegebene Temperaturgradienten der Mischungsweg und damit die Turbulenzgeschwindigkeit und die Energiedissipation den größten mit den geometrischen Verhältnissen (bzw. der homogenen Dicke) kompatiblen Wert an (vgl. hierzu etwa L. BIERMANN, Astron. Nachrichten **257**, 270 [1935], 1). – Herrn W. HEISENBERG ist der eine von uns (L. B.) für Bemerkungen zu diesem Punkt zu Dank verpflichtet. – Im Hinblick auf das Minimumprinzip von PRIGOGINE sei hier nur bemerkt, daß wesentliche Voraussetzungen desselben in den hier betrachteten Fällen gerade nicht erfüllt sind. Siehe z. B. Handbuch der Physik (herausgegeben von S. FLÜGGE), Bd. III/2 (1959), Beitrag von J. MEIXNER u. H. G. REIK, 15; ferner M. KOHLER, Z. Physik **124**, 772 [1948]; TH. PETERS, Z. Physik **144**, 612 [1956] sowie D. ENSKOG, Dissertation, Uppsala 1917, Kap. V (Maximumprinzip).

[5] L. BIERMANN u. R. LÜST, „Non-Thermal Phenomena in Stellar Atmospheres“, Compendium of Stellar Astronomy, Vol. **6**, ed. by G. P. KUIPER, im Druck.

etwa durch den Gradienten des Elektronendrucks, und sicher beeinflußt durch ein etwa vorhandenes Magnetfeld, ansprechen; in einem Druckgradienten, der nicht allein durch ein Potentialfeld aufrechterhalten wird, liegt auch lokal (d. h. im Mikroskopischen) immer eine Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht vor, d. h. lokal besteht keine MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung. Dies ist der Fall entweder auf Grund von Diffusionsströmen oder von elektrischen Strömen quer zu einem Magnetfeld. Es besteht somit im Mikroskopischen ein Reservoir an freier Energie, die zur Anregung von Instabilitäten dienen kann [6]. So sind auch in letzter Zeit verschiedentlich Rechnungen für homogene Plasmen mit anisotroper Geschwindigkeitsverteilung angestellt worden, also für Plasmen mit Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht, die in praktisch allen Fällen Instabilitäten ergaben [7]. Auch von dieser Seite her liegt also die Vermutung sehr nahe, daß auch die Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht in einem Druckgradienten zu Instabilitäten führen können.

In einer folgenden Arbeit wird das Auftreten solcher Instabilitäten an zwei Beispielen durch Rechnung explizit nachgewiesen.

In Fusionsapparaturen sind Druckgradienten prinzipiell nicht zu umgehen. Wie weit die erwähnten Instabilitäten tatsächlich auftreten, hängt wesentlich mit ab von den Dämpfungserscheinungen, durch die das Anwachsen der Instabilitäten wohl auch vollständig verhindert werden kann. Das Maß der Dämpfung wird beeinflußt sein z. B. von der Konfiguration des Magnetfeldes, so daß hier noch keine allgemeine Aussage möglich erscheint. Man kann aber die Frage stellen, inwieweit unabhängig von der Frage der Dämpfung im linearen Bereich obere Grenzen für die Amplituden abgeschätzt werden können, die auf nichtlinearen Effekten beruhen.

In grober Form könnte das auf folgende Weise geschehen. Ist f_0 die BOLTZMANNsche Verteilungsfunktion für das ungestörte Problem und beschreibt f_1 die Störung, so kann, da diese Störung (zu der etwa eine Wellenlänge λ gehört) nur durch den Gradienten von f_0 im Ortsraum hervorgerufen ist, für f_1 nur möglich sein

$$f_1 < \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{grad} f_0 . \tag{5}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{2} m v^2$ und Integration über v sowie durch Anwendung des Energiesatzes folgt

$$\frac{1}{8\pi} \overline{E^2} < \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{grad} \frac{3}{2} n k T . \tag{6}$$

Bei einem reinen Dichtegradienten liefert der Vergleich mit der Feldstärke (4), die sich aus den statistischen Schwankungen bestimmte, und die wir jetzt mit $\overline{E^2_{\text{stat}}}$ bezeichnen wollen,

$$\frac{\overline{E^2}}{\overline{E^2_{\text{stat}}}} < \frac{6\lambda_{\text{D}}}{e^2} k T \frac{\lambda \,|\operatorname{grad} n|}{n} . \tag{7}$$

Als Beispiel für die Abschätzungen (6) und (7) betrachten wir die GABORschen Versuche. Typische Verhältnisse bei GABOR sind:

$$n \approx 10^9 \text{ cm}^{-3}, \quad T = 26\,000\ {}^\circ\text{K}, \quad \lambda \approx \frac{1}{\pi} \lambda_{\text{D}} ,$$
$$n' \lambda_{\text{D}} \approx n ,$$

woraus

$$\sqrt{\overline{E^2}} < 80 \text{ Volt cm}^{-1}, \quad \overline{E^2}/\overline{E^2_{\text{stat}}} < 6 \cdot 10^5$$

folgt. Das stimmt also größenordnungsmäßig mit den von GABOR gemessenen Werten überein. Es sei aber darauf hingewiesen, daß es sich hier natürlich um eine zufällige Übereinstimmung handeln kann.

Die Frage nach den maximalen Amplituden und auch nach deren tatsächlicher Auswirkung auf die Diffusion bedarf sicher noch genauerer Untersuchungen, doch dürften die gemachten groben Aussagen die mögliche Bedeutung des Problems der hier betrachteten Instabilitäten durchaus erkennen lassen.

[7] E. S. WEIBEL, Phys. Rev. Letters **2**, 85 [1959]; E. G. HARRIS, Phys. Rev. Letters **2**, 34 [1959]; B. D. FRIED, Phys. Fluids **2**, 337 [1959]; M. ROSENBLUTH, Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, **4**, 197 [1959].

[6] Der NEWCOMBsche Beweis gegen das Auftreten selbstangeregter Schwingungen (in einer Arbeit von I. B. BERNSTEIN, Phys. Rev. **109**, 10 [1958]) setzt bekanntlich lokales thermodynamisches Gleichgewicht (MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung) voraus.